Varianta 17

SUBIECTUL I

a) $S = 4$.
b) $h = 2\sqrt{3}$.
c) $tgB = \frac{5}{3}$.
d) $a = -3$.
e) Punctul C este mijlocul (AB) $\Rightarrow$ $C(2,3)$.
f) $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.
a) $x = 1,\ y = 2$.
b) Cel mai mare element este $10\sqrt{3}$.
c) $S = 2$.
d) $x = 0$.
e) $\frac{1}{i} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-i} + \frac{1}{1} = 0$.

2.
a) $f(0) = 1$.
b) $y = 0$ asimptota orizontală spre $-\infty$.
c) $f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.
d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}$.
e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

SUBIECTUL III

a) $f(2006) = -1$.
b) $x_1 = 1, x_2 = -2$.
c) Observăm că $f(2007) = 0 \Rightarrow f(1)\cdot f(2)\cdot ...\cdot f(3000) = 0$.
d) $f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(x-2007) = x - 4014$.

e) Fie $P(n): f_n(x) = x - n \cdot 2007$, n∈**N***.

$P(1): f_1(x) = x - 2007$ (A).

Presupunem $P(k)$ (A) şi demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde k≥1.

$P(k): f_k(x) = x - k \cdot 2007$ iar $P(k): f_{k+1}(x) = x - (k+1) \cdot 2007$.

$f_{k+1}(x) = (f_k \circ f)(x) = f_k(x - 2007) = x - (k+1) \cdot 2007$.

De unde $P(n)$ este (A) ∀n∈**N***.

f) Din **e)** $\Rightarrow f_3(x) = x - 6021$. Deci $g(x) - 2007 = x - 6021 \Rightarrow g(x) = x - 4014$.

g) $f(1^3) + f(2^3) + ... f(n^3) = = (1^3 + 2^3 + ... + n^3) - 2007n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - 2007n$.

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

b) $f'(x) = \dfrac{-6x(2x^2+5)}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}$.

c) $f'(x) \le 0, \forall x \in (2, \infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$.(aici am modificat)

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = 0 \Rightarrow$ y=0 este asimptotă orizontală la +∞.

e) $f(x) \le \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} \le \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 0 \le x^4 + 5x^2$ (A).

f) $\displaystyle\int_3^4 f'(x)dx = -\frac{63}{4420}$.

g) Suma se poate scrie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\sqrt{3k+2}\right) \overset{a)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3n+6}$

De unde limita cerută este $\dfrac{1}{6}$.